Finance de Marché, Théorie Moderne du Portefeuille - correction

Eric Vansteenberghe

18 novembre 2017

Cours et exercices corrigés de Finance de Marché en ligne

Si la finance de marché vous intéresse, que vous souhaitez poursuivre dans cette voie pour une carrière professionnelle ou académique, venez creuser des applications théoriques et pratiques (python, R) [1] et consultez les détails du master 2 Empirical Finance de la Sorbonne sur ce lien-ci.

1 Introduction

Le but de cette correction d'examen "type" est de couvrir l'ensemble du programme de finance de marché (gestion de portefeuille) d'un master en rappelant bien les bases théoriques afin de pouvoir être lue sans autre support (pour approfondir la théorie, vous pouvez consulter les deux ouvrages de référence section 17).

2 Espérance, Ecart-type, Skewness et Kurtosis

L'espérance mesure le rendement annuel moyen que l'on peut attendre d'un placement :

$$E(X) = \Sigma p_i x_i$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance (exprimable en pourcentage donc) :

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma p_i (x_i - E(X))^2} = \sqrt{[\Sigma p_i x_i^2 - E(X)^2}$$

La volatilité annualisée est une mesure du risque annualisée :

$$\sigma_t^a = \sqrt{\frac{252}{N-1} \sum_{i=t-N}^{t} (r_i - \overline{r_t})^2}$$

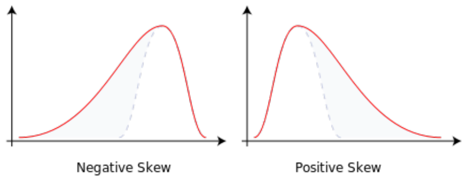
$$\overline{r_t} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N}^{t} r_i$$

Skewness ou coefficient d'asymétrie : c'est un moment d'ordre 3, il est nul si et seulement si la loi est symétrique par rapport à la moyenne. Un investisseur prudent préférera une skewness positive. Pour la loi normale, S=0.

$$S = E[(\frac{(X - E(X))}{\sigma})^3]$$

1. Vous trouverez un apperçu des applications avec ce lien

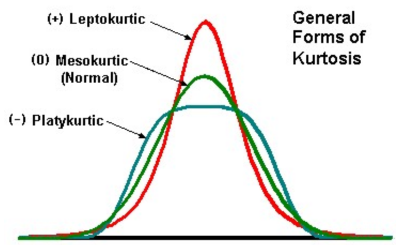
$$S(X) = \sum_i p_i (\frac{x_i - E(X)}{\sigma})^3$$



Kurtosis ou coefficient d'aplatissement est un moment d'ordre 4, il renseigne sur les réalisations de valeurs extrêmes (ce qu'on appelle queues de distribution, ce sont les risques extrêmes). Un $K > 3$ indique des queues de distribution plus épaisses que celles de la loi normale, ce que n'aimera donc pas un investisseur averse au risque. Pour une loi normale, $K = 3$.

$$K = E[(\frac{X - E(X)}{\sigma})^4]$$

$$K(X) = \sum_i p_i (\frac{x_i - E(X)}{\sigma})^4$$



Résultats numériques :

	Fond A	Fond B	Fond C
E(R)	11,30%	8,08%	6,98%
V	0,0053	0,0036	0,0064
σ	7,25%	5,98%	8,00%
S	-2,29	-0,25	-0,55
K	8,35	1,81	3,32

Intuition concernant la normalité des portefeuilles : C a une skewness et kurtosis proche de la loi normale. On note que le portefeuille A a une survenance d'évènements extrêmes plus grande que celle d'une loi normale.

3 Normalité de la distribution des rendements

Le test de Jarque-Bera est un test d'hypothèse qui cherche à déterminer si des données suivent une « loi normale ». On teste :

— H_0 : les données suivent une « loi normale » ($S = 0$ et $K = 3$), contre

— H_1 : les données ne suivent pas une « loi normale » ($S \neq 0$ et $K \neq 3$).

La statistique de test est :

$$JB = \frac{n-k}{6}(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4})$$

Avec :

- n = Nombre d'observations
- k = Nombre de variables explicatives si les données proviennent des résidus d'une régression linéaire. Sinon, k=0.
- S = Skewness
- K = Kurtosis

La statistique JB suit asymptotiquement un χ^2 à 2 degrés de liberté. La p-value (ou probabilité critique) mesure le risque de rejeter à tort H_0 (on rejette H_0 si $p-value < (1-\alpha) = 5\%$ typiquement), α est le risque de première espèce en pourcentage, 95% en général.
Ici on a donc a ne pas rejeter l'hypothèse H_0 pour le portefeuille C, on considère que les données mesurées pour C suivent une loi normale.

4 Semi-Variance

La semi-variance ou Downside-risk est une mesure du risque qui apporte l'avantage de ne prendre en compte que les variations en dessous d'un seuil de rendement, un investisseur appréciera en effet un saut de rendement tandis qu'il n'aimera pas une baisse de rendement.

$$semi\sigma_t = [\frac{1}{N-1}\sum_{i=t-N}^{t}[\overline{r}_i - r^*]^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{r}_i = \begin{cases} r_i & if \quad r_i < r^* \\ r^* & if \quad r_i \geq r^* \end{cases}$$

avec r^* une cible (on prendra ici $E(X)$)

Exemple :

$$semi\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{5}[((-0,2-0,112)^2+\ldots]}$$

Résultats numériques :

	Fond A	Fond B	Fond C
$semi\sigma$	16,44%	8,68%	13,58%

5 Lower Partial Moments

Le Lower Partial Moment est la somme des déviations pondérées des rendements potentiels à partir d'un niveau plancher r^*, où chaque déviation est mise à la puissance n.

Comme la semi-variance, le Lower Partial Moment est une mesure asymétrique du risque.

Le paramètre n peut être considéré comme une mesure de l'aversion du risque de l'investisseur. Plus on est averse à la perte (shortfall) plus n sera grand.

$$LPM_n = \sum_{R_p=-\infty}^{r^*} p_p(r^* - R_p)^n = \sum_{p=1}^{K} p_p[min(0, R_p - r^*)]^n$$

Pour $r^* = E(X)$ et $n = 2$, on retrouve un Lower Partial Moment qui s'apparente à la semi-variance.

6 Value at Risk

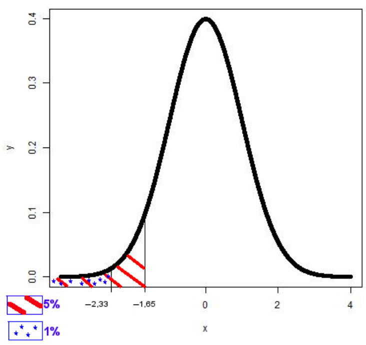
La Value at Risk (VaR) est l'estimation de la perte maximale possible pour un seuil de sûreté prédéfini sur une période de temps donnée.

$$Prob(R_p \leq VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

Exemple : 1-day 99% le seuil de sûreté est 100 €
— 99 % de chance de perdre moins de 100 € en 24 heures
— ou 1 % de chance de perdre plus de 100 € en un jour

Parametric VaR

1. on suppose que les rendements suivent une loi (ici on prendra la loi normale)
2. on calcule la moyenne $\mu = E(X)$ et l'écart-type σ
3. on utilise le 95$^{\text{ème}}$ percentile de la loi normale : 1,65 (ou 2,33 pour 99%)



Ici : $VaR95\% = E(X) - 1,65\sigma$
Résultats numériques :

	Fond A	Fond B	Fond C
VaR 95%	-0,67%	-1,79%	-6,22%

VaR historique

1. distribution d'un an de rendement du stock
2. simuler le rendement du placement actuel
3. ordonner les résultats obtenus
4. on considère qu'il y a 252 jours ouvrés par an, on prend la moyenne des 2 plus mauvais pour la VaR 99% ou la moyenne des 12 pires pour laVaR 95%

Ici, on observe le tableau et on obtient :

	Fond A	Fond B	Fond C
VaR 95%	-5%	-4%	-4%

Méthodes d'estimation de la VaR :

— **paramétrique** : on suppose que les rendements suivent une densité de probabilité définie (e.g. normale, t-Student, etc.) et la mesure de risque est déduite des quantiles de la loi retenue;
— **non paramétrique** : les calculs sont alors effectués sur les données observées (exemple de la VaR historique : on estime empiriquement la distribution des pertes et leurs fréquences d'apparition en fixant un niveau de probabilité voulu);
— **semi-paramétrique** : c'est un mélange des deux méthodes précédentes où l'on ajuste la volatilité estimée par moyenne mobile exponentielle sur données historiques, ou en effectuant une expansion de Cornish-Fisher et autres méthodes à régression sur quantiles.

$$z_\alpha^{CF} = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)S + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)(K-3) - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)S^2$$

Limite VaR

La VaR ne respecte pas le critère de sous additivité : celle-ci implique que le risque agrégé d'un portefeuille ne puisse être supérieur à la somme des risques de ses composantes ($\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$).

La VaR n'apporte aucune information sur la taille des pertes une fois la VaR franchie.

Pour remédier à ces deux problèmes, on introduit l'expected shortfall (ES).

L'**Expected Shortfall** est la moyenne des rendements une fois la VaR franchie, ce sur une période donnée. Elle est aussi appelée C-VaR ou Tail-Loss :

$$ES(\alpha) = E[r | r < VaR(\alpha)]$$

7 Analyses de styles de portefeuilles

Analysis - Return based

Avantages :
— caractérise l'ensemble du portefeuille
— comparaison facile entre les portefeuilles
— agrège les effets des investissements
— rapide et peu coûteuse à réaliser

Désavantages :
— peut ne pas caractériser le style actuel du portefeuille
— sensible à la définition du style de portefeuille
— biaisée par la multicolinéarité de différents styles

versus

Analysis - Holding based

Avantages :
— caractérise chaque position
— comparaison en les positions individuelles aisées
— prise en compte rapide des changements de style

Désavantages
— sensible aux attributs de classification des styles
— plus insensible aux données que le return-based style analysis

Styles
— small versus lager (taille de la capitalisation)
— value versus growth (ratio book to market, high versus low, croissance du chiffre d'affaire)

8 Critère de sélection

Critère moyenne variance Pour une espérance de rendement donnée, on choisit l'actif qui a la plus faible variation de rendement :

	Fond A	Fond B	Fond C
E(R)	11,30%	8,08%	6,98%
V	0,0053	0,0036	0,0064

$E(A) > E(B)$ $V(A) > V(B)$: MV indéterminé entre A et B
$E(A) > E(C)$ $V(A) < V(C)$: MV on préfère A à C
$E(B) > E(C)$ $V(B) < V(C)$: MV on préfère B à C

Critère de la dominance stochastique d'ordre 1 Une variable aléatoire x domine une variable aléatoire y au sens de la dominance stochastique d'ordre 1 lorsqu'elle est préférée à la seconde par tous les individus dont la fonction d'utilité croit avec la richesse.

Théorème DS1 : Si l'on note F et G les fonctions de répartition des variables aléatoires x et y, la variable x domine la variable y au sens de la dominance stochastique d'ordre 1 si et seulement si $F(z) \leq G(z)$ avec $a \leq z \leq b$. L'intervalle $[a, b]$ représente le domaine de variation des aléas.

Remarque : le graph de la fonction de répartition de la variable "dominante" x sera à la droite de celui de la variable y dominée.

Remarque : lorsqu'on se trouve dans une situation où les fonctions de répartition sont sécantes, on ne peut plus classer les variables aléatoires correspondantes selon ce critère de DS1, on introduit alors l'aversion au risque et la dominance stochastique d'ordre 2.

Rdts	**Fond A**	**Fond B**	**Fond C**	**F(A)**	**F(B)**	**F(C)**	**F(A)-F(B)**	**F(A)-F(C)**	**F(B)-F(C)**
-0,20	0,02		0,02	0,02	0	0,02	0,02	0	-0,02
-0,05	0,03	0,02		0,05	0,02	0,02	0,03	0,03	0
-0,04		0,03	0,03	0,05	0,05	0,05	0	0	0
0,00			0,15	0,05	0,05	0,2	0	-0,15	-0,15
0,01	0,15	0,15		0,2	0,2	0,2	0	0	0
0,02			0,35	0,2	0,2	0,55	0	-0,35	-0,35
0,05		0,35		0,2	0,55	0,55	-0,35	-0,35	0
0,14	0,35	0,4		0,55	0,95	0,55	-0,4	0	0,4
0,15	0,4		0,4	0,95	0,95	0,95	0	0	0
0,16	0,05	0,05	0,05	1	1	1	0	0	0

Selon le critère de la DS1, tout est indéterminé.

Pour le cas gaussien, le critère moyenne variance implique que A est préféré à C et B à C pour la DS1.

Critère de la dominance stochastique d'ordre 2 On dit d'une variable aléatoire x qu'elle domine une variable aléatoire y au sens de la dominance stochastique de deuxième ordre lorsqu'elle est préférée à la seconde par tous les individus dont la fonction d'utilité est monotone, croissante et concave. On aura alors :

$$E(U(x)) \geq E(U(y))$$

Avec U(.) appartenant à la classe des fonctions d'utilité monotones croissantes et concaves. La dominance est stricte si l'inégalité est stricte pour au moins une fonction d'utilité.

Ainsi, si F et G sont les fonctions de répartition de deux VA x et y, la variable x domine la variable y au sens de la dominance stochastique d'ordre deux si et seulement si :

$$\int_a^t (F(z) - G(z))dz \leq 0 \quad \forall t \epsilon [a, b]$$

L'intervalle $[a, b]$ représente le domaine de variation des aléas. La dominance est stricte dès lors que l'inégalité est stricte pour au moins une valeur de t.

Remarque : Cette inégalité signifie donc que la surface délimitée par le graph' de la fonction de répartition de l'aléa x est en tout point t inférieure ou égale à celle délimitée par le graph' de la fonction de répartition de y.

Rdts	**F(A)**	**F(B)**	**F(C)**	**int(A)**	**int(B)**	**int(C)**	**intA-intB**	**intA-intC**	**intB-intC**
-0,20	0,02	0	0,02						
-0,05	0,05	0,02	0,02	0,003	0	0,003	0,003	0	-0,003
-0,04	0,05	0,05	0,05	0,0035	0,0002	0,0032	0,0033	0,0003	-0,003
0,00	0,05	0,05	0,2	0,0055	0,0022	0,0052	0,0033	0,0003	-0,003
0,01	0,2	0,2	0,2	0,006	0,0027	0,0072	0,0033	-0,0012	-0,0045
0,02	0,2	0,2	0,55	0,008	0,0047	0,0092	0,0033	-0,0012	-0,0045
0,05	0,2	0,55	0,55	0,014	0,0107	0,0257	0,0033	-0,0117	-0,015
0,14	0,55	0,95	0,55	0,032	0,0602	0,0752	-0,0282	-0,0432	-0,015
0,15	0,95	0,95	0,95	0,0375	0,0697	0,0807	-0,0322	-0,0432	-0,011
0,16	1	1	1	0,047	0,0792	0,0902	-0,0322	-0,0432	-0,011

DS2 : indifférent entre A et B et entre A et C DS2 : préfère B à C

Pour le cas gaussien, le critère moyenne variance implique que A est préféré à C et B à C pour la DS2.

Critère de Roy avec un rendement minimum R_L de -1%

Le critère de Roy sélectionne l'actif qui minimise le risque de ne pas atteindre un niveau de rendement minimum spécifié (MAR = minimum acceptable risk) :

$$Min \quad Prob(R_p < R_L)$$

Dans le cas de la distribution normale, le critère de Roy équivaut à :

$$Min \quad Prob(\frac{R_p - \overline{R_p}}{\sigma_p} < \frac{R_L - \overline{R_p}}{\sigma_p}) \quad \text{ou encore :} \quad Max(\frac{\overline{R_p} - R_L}{\sigma_p})$$

L'application numérique donne :

$$\frac{E(R_A) - (-1\%)}{\sigma_A} = 1,7 \qquad \frac{E(R_B) - (-1\%)}{\sigma_B} = 1,52 \qquad \frac{E(R_C) - (-1\%)}{\sigma_B} = 1$$

Dans le cas gaussien, on préférera A sur B sur C suivant le critère de Roy avec un rendement minimum de -1%

Dans le cas de la distribution anticipée par les analystes, on observe directement dans le tableau :

$$Prob(R_A < -1\%) = 5\% \quad Prob(R_B < -1\%) = 5\% \quad Prob(R_C < -1\%) = 5\%$$

Roy : indifférent entre A, B et C.

Critère de Kataoka avec une probabilité de 5%

Le critère de Kataoka choisit le portefeuille qui maximise la limite de rendement R_L, sous la contrainte que la probabilité que le rendement du portefeuille soit inférieur à R_L soit inférieure à la probabilité α donnée.

Le critère s'écrit :

$$Max(R_L) \text{ sous contrainte } Prob(R_p < R_L) \leq \alpha$$

Dans le cas gaussien, cela revient à :

$$Prob(\frac{R_p - \overline{R_p}}{\sigma_p} < \frac{R_L - \overline{R_p}}{\sigma_p}) \leq \alpha$$

dans le cas où $\alpha = 5\%$:

$$\frac{\overline{R_p} - R_L}{\sigma_p} = 1,65 \quad \text{soit} \quad \overline{R_p} = R_L + 1,65\sigma_p$$

D'où le cas gaussien pour Kataoka on préférera A sur B sur C car :

$$R_L^A = E(R_A) - 1,65\sigma(R_A) = -0,67\%$$

$$R_L^B = E(R_B) - 1,65\sigma(R_B) = -1,79\%$$

$$R_L^C = E(R_C) - 1,65\sigma(R_C) = -6,22\%$$

Dans le cas de la distribution anticipée par les analystes, on observe le tableau pour

$$Prob(R_i < R_L) \leq 5\%$$

$$R_L^A = 1\% \quad R_L^B = 1\% \quad R_L^C = 0\%$$

pour le cas gaussien, on est indifférent entre A et B mais on les préfère à C.

Critère de Telser avec R_L égal à -1% et une probabilité de 5%

Le critère de Telser choisit le portefeuille avec le meilleur rendement sous contrainte d'obéir à une contrainte de risque. C'est une combinaison de Roy et Kataoka. L'investisseur choisit deux données subjectives :

— choix du niveau de risque acceptable α

— choix du rendement minimum acceptable R_L

	A	B	C
E(R)	11,30%	8,08%	6,98%
$Prob(R_p < -1\%) \leq 5\%$	ok	ok	ok

Pour ce critère-là, on préférera A sur B sur C.

Pour le cas gaussien, A ne respecte pas le critère, et on préférera B à C.

Critère de la moyenne géométrique

On sélectionne le portefeuille avec la plus grande moyenne géométrique.

$$R_G = \prod_i [1 + R_i]^{prob_i} - 1$$

	Fond A	**Fond B**	**Fond C**
R_G	11,04%	7,91%	6,67%

Moyenne géométrique : A > B > C

9 Utilité de l'investisseur et caractérisation de son comportement

$$U'(W) = \frac{20}{W} \geq 0 \text{ et } U''(W) = \frac{-20}{W^2} \leq 0$$

Fonction d'utilité croissante avec la richesse et individu averse au risque, c'est une fonction CRRA (constant relativ risk aversion).

AAR=$-\frac{u''}{u'}$	ARR= AAR$\times W$	$P = -\frac{u'''}{u''}$
$T = -\frac{u''''}{u'''}$	$A = -\frac{u'''''}{u''''}$	

L'indice d'**aversion absolue pour le risque** indique la façon dont la demande d'actifs risqués évolue avec la richesse de l'agent.

L'indice d'**aversion relative pour le risque** décrit la façon dont la proportion investie en actifs risqués évolue avec la richesse.

L'indice de **prudence** reflète l'aversion au risque de perte ou downside risk et la préférence pour l'asymétrie positive ($Skewness > 0$).

L'indice de **tempérance** va refléter le comportement d'un agent lorsque celui-ci fait face à un risque non assurable. Un agent qui présente de la tempérance et qui fait face à un risque de revenu non assurable réduira sa part d'actifs risqués dans son portefeuille (son exposition à d'autres risques) même si les risques sont statistiquement indépendants.

L'indice d'**anxiété** va refléter la réaction d'un agent face à des risques multiples.

Fonction d'utilité	AAR	ARR	P	T	A
Log	$\frac{1}{W}$	1	$\frac{2}{W}$	$\frac{3}{W}$	$\frac{4}{W}$

Si l'investisseur est rationnel, il va maximiser son espérance d'utilité :

Max Esp(U)

$U(W) = 10 + 20ln(W)$ avec $W = W_0(1 + Ri)$

Rdts	$U(W)$	$p(A) \times U(W)$	$p(B) \times U(W)$	$p(C) \times U(W)$
-0,20	143,69	2,87		2,87
-0,05	147,13	4,41	2,94	
-0,04	147,34		4,42	4,42
0,00	148,16			22,22
0,01	148,35	22,25	22,25	
0,02	148,55			51,99
0,05	149,13		52,20	
0,14	150,78	52,77	60,31	
0,15	150,95	60,38		60,38
0,16	151,12	7,56	7,56	7,56

	$p(A) \times U(W)$	$p(B) \times U(W)$	$p(C) \times U(W)$
Esp(U(W))	150,25	149,68	149,45

Il choisit donc d'investir toute sa richesse dans A.

On considère un agent face à des loteries qui diffère par leurs distributions de probabilités. Si on suppose que l'agent dispose de relations de préférence et d'indifférence sur les conséquences des loteries, ces relations suffisent à caractériser le comportement de l'agent face au risque. Ces relations de préférence doivent respecter les cinq axiomes de Von Neumann-Morgenstern :

1. **Comparabilité**, soit p et q deux distributions de probabilités :
   $\forall p, q$ soit $p \succ q$ soit $p \prec q$ soit $p \sim q$
2. **Transitivité** : $\forall p, q, z$ si $p \succ q$ et $q \succ z$ alors $p \succ z$
3. **Indépendance** : $\forall p, q, z, \forall \alpha \in [0,1]$ si $p \succ q$ alors $\alpha p + (1-\alpha)z \succ \alpha q + (1-\alpha)z$
4. **Continuité** : $\forall p, q, z$ si $p \succ q \succ z$ alors $\exists \alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha p + (1-\alpha)z \succ q \succ \beta q + (1-\beta)z$
5. **Rangement** :
   Notons $L(x, z : \alpha)$ une loterie avec la probabilité α d'obtenir x et la probabilité $(1-\alpha)$ d'obtenir z. alors si $x \succeq y \succeq z$ et $x \succeq u \succeq z$ alors si $y \sim L(x, z : \alpha_1)$ et $u \sim L(x, z : \alpha_2)$ alors si $\alpha_1 > \alpha_2$ alors $y \succ u$; si $\alpha_1 = \alpha_2$ alors $y \sim u$

Avec ces cinq axiomes et l'hypothèse que les agents préfèrent la richesse, nous obtenons la théorie de l'utilité espérée et caractérisons l'attitude de l'agent face au risque.

Le paradoxe de Allais remet en cause la théorie de l'utilité espérée, car il viole l'axiome d'indépendance.

10 Primes de risque

Pour toute fonction d'utilité concave, on a l'**inégalité de Jensen** :

$$E(U(W)) < U(E(W))$$

Afin de calculer la **prime de risque de Markowitz**, on calcule d'abord l'**équivalent certain** W^{eq} :

$$U(W^{eq}) = E(U(W))$$

La prime de risque de Markowitz, π vaut :

$$\pi = E(W) - W^{eq}$$

c'est la somme que l'agent est prêt à payer pour éviter le risque.
Ici :

$$E(W) = (1 + E(R_A) \times W = 1113$$

$$U(E(W)) = 10 + 20ln(1113) = 150,29$$

$$E(U(W)) = 150,25$$

On vérifie bien l'inégalité de Jensen : $E(U(W)) < U(E(W))$.
On calcule l'équivalent certain tel que : $ln(W^{eq}) = 150,25$ soit $W^{eq} = 1110,35$ €.
Ainsi la prime de Markowitz vaut : $\pi = E(W) - W^{eq} = 2,65$ €

La formule pour la **prime de risque d'Arrow-Pratt** est :

$$\pi = \frac{1}{2}\sigma^2 ARA$$

Où ARA est l'aversion absolue au risque : $ARA = -\frac{U''}{U'}$
La prime de risque d'Arrow-Pratt satisfait à l'équation :

$$U[W + E(Z) - \pi] = E[U(W + Z)]$$

On pose : $\tilde{Z} = Z - E(Z)$, $\tilde{W} = W + E(Z)$

$$U(\tilde{W} - \pi_R) = E(U(\tilde{W} + \tilde{Z}))$$

On suppose : $\pi_R \ll \tilde{W}$ et $\tilde{Z} \ll \tilde{W}$ et on effectue un développement de Taylor :

$$U(\tilde{W}) - \pi_R U'(\tilde{W}) = E[U(\tilde{W}) + \tilde{Z}U'(\tilde{W}) + \frac{1}{2}\tilde{Z}^2 U''(\tilde{W}))]$$

Comme $E(\tilde{Z}) = 0$ et $E(\tilde{Z}^2) = \sigma^2_{\tilde{Z}}$ on obtient bien la formule énoncée.

11 Frontière efficiente sans actif sans risque

L'équation générique de la frontière efficiente de Markowitz dans le plan (écart-type, espérance de rendement) :

$$V(R_p) = aE(R_p)^2 + bE(R_p) + c$$

S'il n'y a pas d'actif sans risque.

$$R = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \dots \\ E(R_N) \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$E(R_p) = R^T X = X^T R$$

Le programme est :

$$Min \frac{1}{2} X^T \Omega X \qquad \text{sous contrainte} \qquad \begin{cases} X^T \overline{R} = E(R_p) \\ X^T \overline{1} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Ecrivons le Lagrangien et ses conditions de premier ordre :

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} X^T \Omega X + \lambda [E(R_p) - X^T \overline{R}] + \gamma [1 - X^T \overline{1}]$$

$$\begin{cases} \frac{d\mathscr{L}}{dX} = \Omega X - \lambda \overline{R} - \gamma \overline{1} = 0 \\ \frac{d\mathscr{L}}{d\lambda} = E(R_p) - X^T \overline{R} = 0 \\ \frac{d\mathscr{L}}{d\gamma} = 1 - X^T \overline{1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \Omega^{-1}(\lambda \overline{R} + \gamma \overline{1}) \\ \overline{R}^T X = \overline{R}^T \Omega^{-1}(\lambda \overline{R} + \gamma \overline{1}) = E(R_p) \\ \overline{1}^T X = \overline{1}^T \Omega^{-1}(\lambda \overline{R} + \gamma \overline{1}) = 1 \end{cases}$$

On définit :

$$A = \overline{1}^T \Omega^{-1} \overline{R} = \overline{R}^T \Omega^{-1} \overline{1}$$

$$B = \overline{R}^T \Omega^{-1} \overline{R}$$

$$C = \overline{1}^T \Omega^{-1} \overline{1}$$

$$D = BC - A^2$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{CE(R_p) - A}{D} \\ \gamma = \frac{B - AE(R_p)}{D} \end{cases}$$

Ainsi la formule demandée est :

$$X = g + hE(R_p)$$

avec

$$\begin{cases} g = \frac{B\Omega^{-1}\overline{1} - A\Omega^{-1}\overline{R}}{D} \\ h = \frac{C\Omega^{-1}\overline{R} - A\Omega^{-1}\overline{1}}{D} \end{cases}$$

Pour obtenir un portefeuille d'espérance de rendement $E(R_j)$, on prendra $[1 - E(R_j)]$ de g et $E(R_j)$ de $g + h \implies E(R_p) = g + hE(R_j)$

12 Frontière efficiente avec un actif sans risque

Avec un actif sans risque, le programme pour obtenir la frontière efficient s'écrit :

$$Max\theta = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma(R_M)} \qquad \text{sous contrainte} \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{3}$$

$$Max\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i (R_i - R_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{i,j}}} = X^T (R - R_f)[X^T \Omega X]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{dX} = (R - \overline{R_f})[X^T \Omega X]^{-\frac{1}{2}} + [X^T (R - \overline{R_f})](-\frac{1}{2})2\Omega X [X^T \Omega X]^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$(R - \overline{R_f}) - [X^T (R - \overline{R_f}] \Omega X [x^T \Omega X]^{-1} = 0$$

$$(R - \overline{R_f}) - \lambda \Omega X = 0$$

$$(R - \overline{R_f}) = \Omega Z$$

$$\begin{cases} R_1 - R_f = Z_1\sigma_{11} + Z_2\sigma_{12} + \ldots + Z_N\sigma_{1N} \\ \ldots \\ R_N - R_f = Z_1\sigma_{N1} + Z_2\sigma_{N2} + \ldots + Z_N\sigma_{NN} \end{cases}$$

$X_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{N} Z_i}$

Comme : $\sum_{i=1}^{N} X_i \lambda = \sum_{i=1}^{N} Z_i \implies \lambda = \sum_{i=1}^{N} Z_i$

Ici nous devons résoudre le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} R_1 - R_f = Z_1\sigma_{11} + Z_2\sigma_{12} + Z_3\sigma_{13} \\ R_2 - R_f = Z_1\sigma_{21} + Z_2\sigma_{22} + Z_3\sigma_{23} \\ R_3 - R_f = Z_1\sigma_{31} + Z_2\sigma_{32} + Z_3\sigma_{33} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} 9 = 5Z_1 + 4Z_2 + 3Z_3 \\ 7 = 4Z_1 + 2Z_2 + 5Z_3 \\ 6 = 3Z_1 + 5Z_2 + 1,5Z_3 \end{cases}$$

On trouve : $Z_1 = 1,59 \quad Z_2 = 0,23 \quad Z_3 = 0,03$

D'où : $X_1 = 0,86 \quad X_2 = 0,13 \quad X_3 = 0,02$

$$E(R_M) = X_1 R_1 + X_2 R_2 + X_3 R_3$$

$$V(R_M) = X_1^2 \sigma_{11} + X_2^2 \sigma_{22} + X_3^2 \sigma 33 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma 13 + 2X_2X_3\sigma 23$$

Finalement : $E(R_M) = 9,7$ et $\sigma(R_M) = 2,16$

Ce qui nous donne la CML :

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma(R_M)} \sigma(R_p)$$

13 Portefeuille d'arbitrage

13.1 Enoncé

On considère un actif sans risque de rendement 1% et le tableau d'espérance et de covariance suivant (exprimé en pourcentages) :

	A	B	C
Espérance	10	9	7
A	5	2	3
B		2	0,5
C			1,5

Vous avez identifié un portefeuille d'actions D avec un $\beta_D = 0,2$ et une espérance de rendement de 14%. Proposez si possible un portefeuille d'arbitrage en indiquant son excès de rendement α et sa sensibilité au marché β.

13.2 Méthode

On calcule tout d'abord la SML :

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_M) - R_f)$$

avec : $\beta_i = \frac{cov(R_i,R_M)}{\sigma_M^2}$

On calcule la composition du portefeuille de marché en actif A, B et C :

$X_A = 6,27$	$X_B = 1,63$	$X_C = -6,9$

On trouve avec ces pondérations les caractéristiques suivantes pour le portefeuille de marché :

$$E(R_M) = 29\%$$

$$V(R_M) = 43,41$$

Ainsi on peut calculer le β du portefeuille B : $\beta_B = \frac{X_A cov(R_B,R_A) + X_B \sigma_B^2 + X_C cov(R_B,R_C)}{\sigma_M^2} = 12,36\%$

Ici la SML nous donne une espérance de rendement attendue pour D : $E(R_D) = 6,62\%$ Le portefeuille D, qui a une espérance de rendement de 14%, est donc actuellement sous-évalué en prix.

Les investisseurs rationnels devraient donc immédiatement acheter D et son prix devrait alors augmenter jusqu'à ce que son rendement attendu soit égal à son rendement exigé (on aura alors retrouvé l'équilibre sur la SML).

Un portefeuille d'arbitrage a pour un risque nul une espérance de rendement supérieure ou égale à 0.

Une multitude de portefeuilles d'arbitrage sont possibles ici. Il faut constituer un portefeuille qui a le même β que D par exemple en combinant l'actif B et R_f (qui a un β nul), on aura un portefeuille composé de $x = \frac{\beta_D}{\beta_B} = 70\%$ d'actif B est de $1 - x = 30\%$ d'actif R_f par exemple. Puis on combine ce portefeuille et l'actif D qui ont le même risque pour avoir un portefeuille de $\beta = 0$ avec une $E(Rdt) \geq 0$. On vend donc par exemple $x = 70\%$ d'actif B et de 30% de R_f qui financent un achat de 100% de l'actif D.

Le portefeuille a bien un β nul par construction :

$$\beta_{\text{arbitrage}} = \frac{cov(R_D - xR_B - (1-x)R_f, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{cov(R_D, R_M}{\sigma_M^2} - x\frac{co(R_B, R_M)}{\sigma_M^2} = 0$$

et une espérance de rendement ($\alpha = -0,7 \times 9\% - 0,30 \times 1\% + 14\% = 7,4\% \geq 0$). Arbitrage ici possible en théorie (β nul et espérance de rendement ≥ 0), avec α bien plus grand que l'ordre des frais de transaction plausible (de l'ordre de 10 points de base pour les actions).

14 Modèle d'Evaluation par Arbitrage

Le modèle d'évaluation par arbitrage est un modèle financier d'évaluation des actifs d'un portefeuille qui s'appuie sur l'observation des anomalies du MEDAF et considère les variables propres aux firmes susceptibles d'améliorer davantage le pouvoir prédictif du modèle d'évaluation. Les modèles à facteurs supposent que le processus de génération des rendements d'une action est sensible aux mouvements de différents facteurs ou indices. Les modèles à facteurs cherchent à capturer les forces économiques majeures et facteurs de risque agissant systématiquement sur les mouvements des prix de toutes les actions. Pour lutter contre l'instabilité du β (qui indique le risque spécifique par type de facteur), le modèle MEA introduit des facteurs macroéconomiques et spécifiques. On pourra citer le modèle à trois facteurs de Fama et French (puis 4, 5, 6 facteurs). Trois facteurs de Fama et French :

1. $R_M - R_f$ la rentabilité en excès par rapport au placement sans risque
2. SMB : différence entre la rentabilité des titres de petite capitalisation boursière et la rentabilité des titres de capitalisation boursière importante (small minus big)
3. HML : différence entre la rentabilité des titres avec un ratio valeur comptable sur valeur de marché élevé et la rentabilité des titres avec un ratio valeur comptable sur valeur de marché faible (high minus low)

Autres facteurs :
- taux de croissance de la production industrielle
- taux d'inflation (anticipé ou non)
- Spread entre les taux d'intérêt long et court termes
- Spread entre les obligations juniors et seniors

14.1 Sujet

Vos analystes vous proposent un modèle à deux facteurs de la forme :

$$R_i = a + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \epsilon_i$$

On suppose les portefeuilles A, B et C évalués à leur "juste valeur", pouvez-vous réaliser un portefeuille d'arbitrage avec le portefeuille F?

Portefeuilles	**Espérance de Rendement**	b_1	b_2
A	10	0,7	0
B	8	0	0,6
C	7	0,3	0,7
F	8,2	0,2	0,5

14.2 Méthode

Le modèle à facteurs ou Arbitrage Pricing Theory (APT) n'est basé que sur une seule hypothèse : l'absence d'opportunité d'arbitrage selon laquelle les portefeuilles ou les actifs présentant les mêmes risques doivent s'échanger aux mêmes prix.

Ce modèle n'intègre aucun facteur relatif aux préférences des investisseurs.

La méthode d'évaluation par arbitrage peut se décrire sous cette forme mathématique :

$$E(R) = R_f + \beta_1(R_1 - R_f) + \beta_2(R_2 - R_f)$$

Avec R_n les rendements espérés du titre qui aurait un β de 1 pour ce facteur et 0 pour les autres.

Ici nous devons résoudre le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} R_A = a + b_{A1} I_1 + b_{A2} I_2 \\ R_B = a + b_{B1} I_1 + b_{B2} I_2 \\ R_C = a + b_{C1} I_1 + b_{C2} I_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 11,12 \\ I_1 = -1,6 \\ I_2 = -5,2 \end{cases} \tag{4}$$

On ne peut donc pas ici réaliser de portefeuille d'arbitrage avec le portefeuille F qui est correctement évalué selon ce modèle :

$$E(R_F) = 8,2 = a + 0,2 I_1 + 0,5 I_2$$

15 Mesure de performance

Pour la **théorie moderne du portefeuille** (TMP), l'hypothèse principale est qu'il est possible de représenter les préférences des agents pour des portefeuilles par des fonctions d'utilité ne dépendant que (de manière croissante) du rendement attendu de celui-ci et (de manière décroissante) de la variance du revenu de ce même portefeuille. Dans ce cadre, l'utilité d'une distribution de la richesse dépend uniquement de l'espérance et de la variance de la richesse terminale. Grâce à cette hypothèse, l'analyse de portefeuille se résume à une analyse espérance variance. Ceci est vrai lorsque la fonction d'utilité élémentaire est quadratique ou lorsque les rendements sont des variables aléatoires dont la distribution suit la loi normale ou encore lorsque les risques sont faibles. Lorsque l'utilité de l'agent dépend positivement de l'espérance du rendement du portefeuille et négativement de sa variance, la maximisation de son utilité suppose la sélection des portefeuilles les moins risqués à rendement espéré donné. On peut ainsi définir une frontière efficiente de portefeuilles préférés par les agents.

Tobin [1958] puis Sharpe [1964] ont étendu la théorie du portefeuille de Markowitz. Hypothèse du **Capital Asset Pricing Model** (CAPM) ou Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers (MEDAF) :

- atomicité (les investisseurs n'influencent pas les prix)
- les investisseurs font des prévisions homogènes sur les rendements
- le modèle est statique (et il comprend donc uniquement deux périodes)
- il existe un actif sans risque
- absence de taxes, de coûts de transaction, de régulation ou de limite à l'emprunt
- l'information est gratuite et disponible à tous les investisseurs
- la fonction d'utilité des agents est quadratique ou les rendements sont des variables aléatoires dont la distribution suit la loi normale

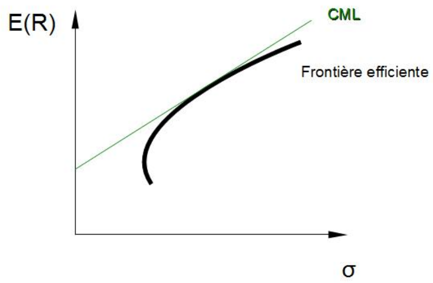
Proposition : En présence d'un actif sans risque, le portefeuille optimal de chaque agent est obtenu en combinant l'actif certain à un portefeuille risqué dont la composition est constante, indépendante du rendement exigé.

L'actif sans risque (exemple : bon du trésor américain i.e. T-bill) a les caractéristiques suivantes :

- $E(R_f) \neq 0$

— $\sigma_{R_f} = 0$
— $\forall i, cov(R_i, R_f) = 0$

Si on trace la tangente à la frontière des portefeuilles efficients passant par l'actif sans risque, on obtient la capital market line (droite de marché). Les portefeuilles sur cette droite de marché dominent les autres portefeuilles possibles. Le théorème de séparation de James Tobin indique qu'on investit dans un portefeuille risqué le long de la CML et qu'on emprunte-prête au taux sans risque (R_f) :



$E(R_p) = E(R_f) + \frac{E(R_M)-R_f}{\sigma(R_M)}\sigma(R_p)$

Limites :

Le MEDAF postule des hypothèses théoriques assez restrictives qui la plupart du temps ne sont pas vérifiées, entre autres :

— toute transaction d'une certaine taille a un effet sur le prix d'une action
— peu d'investisseurs ont un portefeuille de Markowitz
— Harry Markowitz a lui-même écrit en 2005 que si l'on modifie l'hypothèse de R_f (les investisseurs peuvent prêter ou emprunter de l'argent au taux sans risque) alors les conclusions de son modèle sont modifiées drastiquement. On y stipule qu'un investisseur peut emprunter de l'argent sans limites de taille, ce qu'aucune banque n'autorise évidemment aujourd'hui
— d'autre part, problème d'estimation et d'instabilité du β (instabilité, non-stationnarité, variable dans le temps, etc.)
— critique de Roll : le portefeuille de marché n'étant pas observable

1. alors on utilise un proxy si le proxy utilisé dans le CAPM est faux, mais que le CAPM est juste alors on pourrait rejeter le modèle
2. d'un autre côté, si le CAPM est faux, mais que le proxy du portefeuille de marché est sur la frontière efficiente alors on ne peut pas rejeter le modèle
3. le CAPM n'est donc pas testable

Le **ratio de Sharpe** mesure la performance du portefeuille en comparant la pente de la CML $S_M = \frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M}$ avec la pente du portefeuille choisie $S_p = \frac{E(R_p)-R_f}{\sigma_p}$. Nota : quand le ratio de Sharpe est négatif on préférera alors celui avec le ratio de Sharpe qui a la valeur absolue la plus grande

Le **ratio de Treynor** compare la pente du portefeuille avec la pente de la SML :
$T_p = \frac{R_p-R_F}{\beta_p}$ contre $T_M = \frac{R_M-R_F}{\beta_M}$

L'**alpha de Jensen** :

Dans le cadre du MEDAF, seul le risque systémique est rémunéré. L'alpha de Jensen mesure le rendement excédentaire (plus grand/petit que le portefeuille de marché, après ajustement pour ne mesurer que le risque systémique). $R_p - R_f = \alpha + [\beta_p(R_M - R_f)]$ d'où $\alpha = R_p - R_f - \beta_p(R_M - R_f)$

Avec :

$$\beta_p = \frac{cov(R_p, R_M)}{\sigma_M^2}$$

Interprétation :
- Negatif : le gérant du fonds a sous-performé le marché après ajustement du niveau de risque systémique du fond
- Zero : le gérant du fonds a suivi le marché après ajustement du niveau de risque systémique du fond
- Positif : le gérant du fonds a sur-performé le marché après ajustement du niveau de risque systémique du fond

Le ratio d'information :
On évalue le portefeuille du gérant par rapport au benchmark (portefeuille indiciel, mais si il y a de la tracking error supérieure à 1% alors on ne peut pas considérer que c'est un portefeuille indiciel).
$I_p = \frac{\alpha_p}{\sigma(\epsilon_p)}$ Le ratio d'information divise l'alpha du portefeuille par le risque non systémique, il mesure le rendement anormal par unité de risque. On obtient l'α, le β et ϵ_p simultanément par régression. Ensuite on calcule l'écart-type de l'ϵ_p. Le risque non-systémique peut en théorie être éliminé par diversification.

Interprétation :
Utiliser la mesure de l'alpha de Jensen pour décider de la compensation qu'on donnera au gestionnaire du portefeuille.
Pour décider du portefeuille optimal :
- le ratio de Sharpe si le portefeuille représente l'investissement total
- la mesure de Treynor si le portefeuille est un sous-portefeuille d'un large groupe de portefeuilles gérés passivement
- le ratio d'information pour un portefeuille géré activement et qui est mixé avec un portefeuille géré passivement

Limites principales :
- impossibilité de distinguer statistiquement la chance du talent
- besoin de beaucoup d'observations pour avoir des résultats significatifs
- quand le portefeuille est géré activement alors les hypothèses de stationnarité basiques ne sont pas respectées
- mesures reposent sur la validité du MEDAF
- valide si les rendements suivent une distribution normale
- le risque de downsize peut être sous-estimé si les mesures conventionnelles sont utilisées

Mesures de performance alternatives :
- ratio de Sortino : similaire au ratio de Sharpe sauf qu'on utilise le downside risk au dénominateur, intéressant, car une volatilité positive n'est pas mauvaise pour l'investisseur.
- ratio de Calmar : souvent appliqué aux Hedge Funds, utilisé pour déterminer le rendement par rapport au drawdown risk
- Best/Worst Month : mesure le meilleur et plus mauvais rendement mensuel qu'a vu le portefeuille pendant la période

16 Efficience des marchés

Fama est souvent perçu comme le père de l'hypothèse d'efficience des marchés, débutée avec un article de mai 1970 du "Journal of Finance", il définit le niveau d'efficience des marchés :

1. L'efficience forte
   - les prix des actions réflètent toute l'information (publique et privée) au sujet d'une entreprise

— (les délits d'initiés ne devraient pas exister)

2. L'efficience semi-forte
   — les prix des actions réflètent tout l'information publiquement disponible au sujet de l'entreprise
   — l'analyse fondamentale des données publiques ne devrait rien apporter
3. L'efficience faible
   — les prix des actions réflètent toutes les informations passées de prix et de volume du marché
   — alors l'analyse technique ne devrait pas être rentable

17 Références

— LA référence : **Essentials of Investements** de Bodie, Kane et Marcus

— **Quantitative Financial Economics** de Keith Cuthbertson

— http ://mvpprograms.com/help/images/KurtosisPict.jpg

— wikipedia.org

— www.master272.com/finance/portef/thportefeuille06.pdf